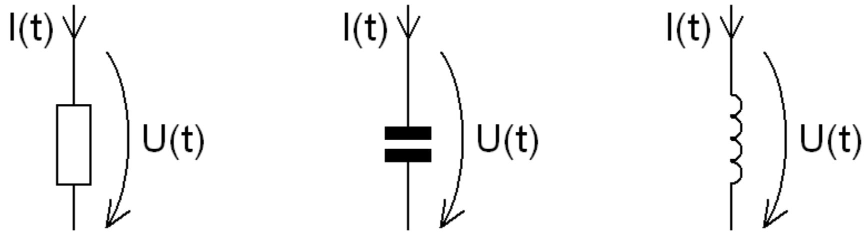
# Passive Netzwerke – Differentialgleichungen

H. Friedli

## Darstellung der passiven Bauelemente

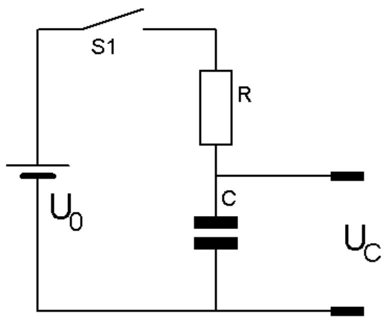
Widerstand Kondensator Spule




$U(t) = R \cdot I(t)$ $\quad I(t) = C \cdot \dfrac{dU(t)}{dt} = C \cdot \dot{U}$ $\quad U(t) = L \cdot \dfrac{dI(t)}{dt} = L \cdot \dot{I}$

Mit diesen Definitionen lassen sich alle passiven Kombinationen von R, C und L in Serie- und/oder Parallelschaltungen diskutieren. Wir beschränken uns auf drei klassische Beispiele:

## Laden eines Kondensators:




Wie gross wird $U_C(t)$, wenn zum Zeitpunkt t=0 der Schalter geschlossen wird? Betrachtet man den geschlossenen Stromkreis (Maschengleichung!), ergibt sich:

$$R \cdot I + U_C - U_0 = 0 \qquad (1)$$

Ferner gilt für den Kondensator:

$$I(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt} = C \cdot \dot{U}_C \qquad (2)$$

(1) und (2) stellen ein Gleichungssystem für die unbekannten *Funktionen* $U_C(t)$ und I(t) dar. (1) enthält eine Ableitung.
Lösen kann man das System, indem man zum Beispiel (1) auf beiden Seiten nach t ableitet und dann (2) einsetzt. Damit eliminiert man $U_C(t)$:

$$R \cdot \dot{I} + \dot{U}_C - \dot{U}_0 = 0 \Rightarrow R \cdot \dot{I} + \dot{U}_C = 0 \Rightarrow R \cdot \dot{I} + \frac{I}{C} = 0$$

Die Gleichung

$$RC \cdot \dot{I} + I = 0 \qquad \text{(DGL)}$$

ist eine Differentialgleichung für I(t).Man löst sie mit dem Ansatz:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{\alpha t}$$

Einsetzen in der DGL ergibt folgende Zeile:

$$RC \cdot \alpha \cdot I_0 \cdot e^{\alpha t} + I_0 \cdot e^{\alpha t} = 0.$$

Da die Gleichung für alle t erfüllt sein muss, folgt daraus eine Bedingung für $\alpha$:

$$(RC \cdot \alpha + 1) \cdot I_0 \cdot e^{\alpha t} = 0 \Rightarrow RC \cdot \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

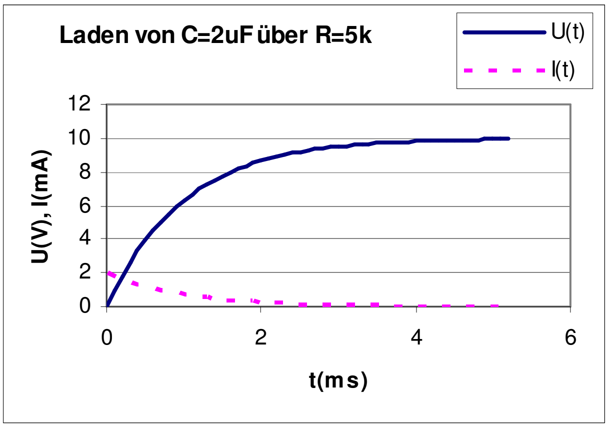
Wenn für t=0 der Kondensator nicht geladen ist, folgt $U_C(0)=0$ und mit (1)

$$I(0) = I_0 \cdot e^{\alpha \cdot 0} = I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

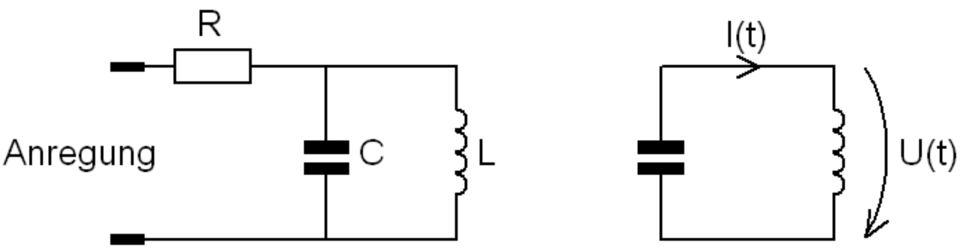
Die Spannung $U_C(t)$ über dem Kondensator ist unter Verwendung von (1) als Funktion somit vollständig bestimmt:

$$R \cdot I_0 \cdot e^{\alpha t} + U_C - U_0 = 0 \Rightarrow U_C = U_0 - R \cdot I_0 \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow U_C = U_0 - U_0 \cdot e^{\alpha t} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{U_C(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}}$$




**Schwingkreis**
Speist man über einen Widerstand eine sinusförmige Spannung in eine Parallelschaltung aus einem Kondensator und einer Spule ein, so wird dieser *Parallelschwingkreis* oder *LC-Kreis* bei einer gewissen Frequenz Resonanz zeigen.




Zur Analyse genügt es, die Parallelschaltung von C und L zu studieren. Nach den Definitionen folgt nämlich:

$$U(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt} \qquad (1)$$

und $$I(t) = -C \cdot \frac{dU(t)}{dt} \qquad (2)$$

Leiten wir (2) nach der t ab:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \dot{I} = -C \cdot \frac{d^2U(t)}{dt^2} = -C \cdot \ddot{U} \ . \quad (3)$$

Durch Einsetzen von (3) in (1) eliminiert man I(t). Dies führt auf eine DGL für die unbekannte Funktion U(t):

$$U(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt} = -LC \cdot \frac{d^2U(t)}{dt^2} = -LC \cdot \ddot{U}(t) \qquad \text{(DGL)}$$

Diese DGL löst man mit dem Ansatz: $U(t) = \hat{U}\sin\omega t$ . Einsetzen in die DGL ergibt:

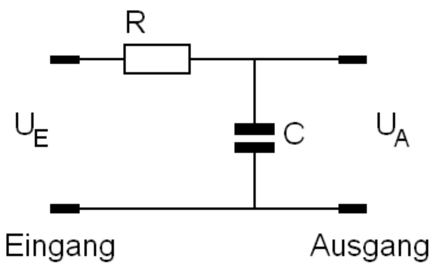
$$U(t) = \hat{U}\sin\omega t = LC \cdot \omega^2 \hat{U}\sin\omega t \Rightarrow 1 = LC \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

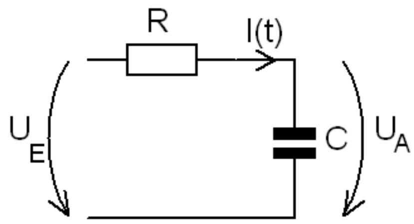
Daraus leitet sich die Thomsonsche Schwingungsformel für die Resonanzfrequenz ab: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Die Amplitude $\hat{U}$ ist wie beim Federpendel „frei" wählbar. Sie wird beim idealen d.h. verlustfreien Schwingkreis bei Resonanz unendlich gross, bei Dämpfung maximal.

**Tiefpass**

Wird an einen Spannungsteiler, bestehend aus Widerstand und Kondensator, eine sinusförmige Spannung angelegt, ergibt sich je nach Frequenz f eine andere Amplitude am Ausgang. Für f=0 (Gleichspannung) ist $U_A$=$U_E$, sobald der Kondensator aufgeladen ist. Je höher f gewählt wird umso öfter muss der Kondensator umgeladen werden und umso grösser ist also der in R und C fliessende Strom. $U_A$ wird mit zunehmender Frequenz eine immer kleiner werdende Amplitude aufweisen und mehr oder weniger phasenverschoben sein.




Für die Diskussion der Schaltung berufen wir uns wieder auf die Definition und erhalten:

$$U_E(t) = R \cdot I(t) + U_A(t) \qquad (1)$$

$$I(t) = C \cdot \dot{U}_A \qquad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) eliminiert I(t) und führt auf eine DGL für die unbekannte Funktion $U_A$(t):

$$U_E(t) = RC \cdot \dot{U}_A(t) + U_A(t) \qquad \text{(DGL)}$$

Mit dem Ansatz $U_E(t) = \hat{U}_E \cdot \sin(\omega t)$ und

$U_A(t) = \hat{U}_A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \hat{U}_A(\sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi)$ sowie

$\dot{U}_A(t) = \hat{U}_A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \hat{U}_A \cdot \omega \cdot (\cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi)$

erhält man folgende Zeile:

$$\hat{U}_E \cdot \sin\omega t = \hat{U}_A \cdot RC\omega \cdot (\cos\omega t \cdot \cos\varphi - \sin\omega t \cdot \sin\varphi) + \hat{U}_A(\sin\omega t \cdot \cos\varphi + \cos\omega t \cdot \sin\varphi)$$

Diese Gleichung muss für alle t erfüllt sein, d.h. die Vorfaktoren von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ müssen links und rechts vom Gleichheitszeichen übereinstimmen. *(Mit Vektorrechnung: $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ sind die zwei linear unabhängigen Basisvektoren eines zweidimensionalen Vektorraums; die Spaltenvektoren müssen daher links und rechts vom Gleichheitszeichen übereinstimmen.)* Also:

$$\hat{U}_E \cdot \sin(\omega t) = -\hat{U}_A \cdot RC\omega \cdot \sin\omega t \cdot \sin\varphi + \hat{U}_A \sin\omega t \cdot \cos\varphi$$
$$0 = \hat{U}_A \cdot RC\omega \cdot \cos\omega t \cdot \cos\varphi + \hat{U}_A \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi$$

Das führt auf ein Gleichungssystem mit den unbekannten $\hat{U}_A$ und $\varphi$:

$$\hat{U}_E = -\hat{U}_A \cdot RC\omega \cdot \sin\varphi + \hat{U}_A \cdot \cos\varphi \qquad (3)$$
$$0 = \hat{U}_A \cdot RC\omega \cdot \cos\varphi + \hat{U}_A \cdot \sin\varphi \qquad (4)$$

Division von (4) durch $\hat{U}_A \cos\varphi$ führt auf

$$\tan\varphi = -RC\omega\ . \qquad (5)$$

Damit ist die Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung bestimmt:

$$\underline{\underline{\varphi = -\arctan(RC\omega)}}$$

Dividiert man (3) durch $\hat{U}_A \cos\varphi$, erhält man $\frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A \cdot \cos\varphi} = -RC\omega \cdot \tan\varphi + 1$

und mit (5)

$$\frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A \cdot \cos\varphi} = \tan^2\varphi + 1. \qquad (6)$$

Nach F&T, S.52 gilt $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi$ und damit $\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \tan^2\varphi}$ .

Gleichung (6) wird dann zu

$$\frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A}\sqrt{1 + \tan^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{U}_E}{\hat{U}_A} = \sqrt{1 + \tan^2\varphi}$$

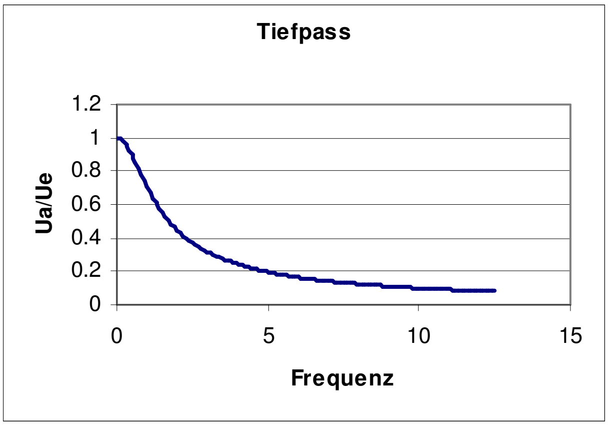
Damit ist die frequenzabhängige Ausgangsamplitude bestimmt:

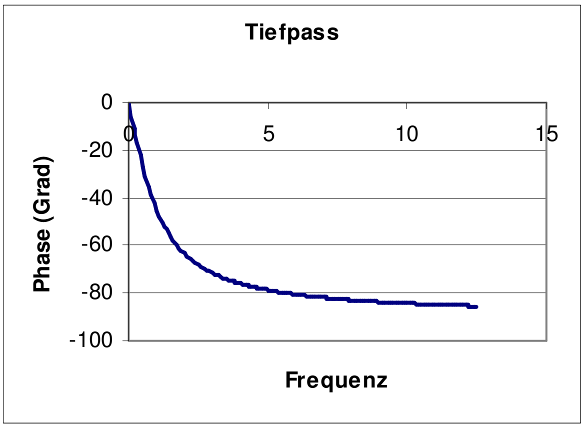
$$\underline{\underline{\hat{U}_A = \frac{\hat{U}_E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}}}$$

Interpretation des Tiefpasses: Für tiefe Frequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi} << \frac{1}{2\pi RC}$ ist der Nenner im wesentlichen 1 und $\hat{U}_A \approx \hat{U}_E$; tiefe Frequenzen werden praktisch ungehindert durchgelassen. Für hohe Frequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi} >> \frac{1}{2\pi RC}$ ist der Nenner in wesentlichen $2\pi fRC$ und $\hat{U}_A$ nimmt mit $1/f$ ab; hohe Frequenzen werden ausgefiltert.

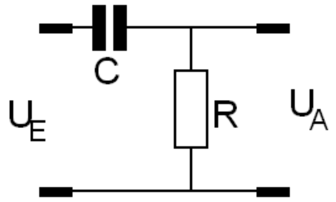
In der Praxis wird häufig das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung dargestellt:

$$\frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

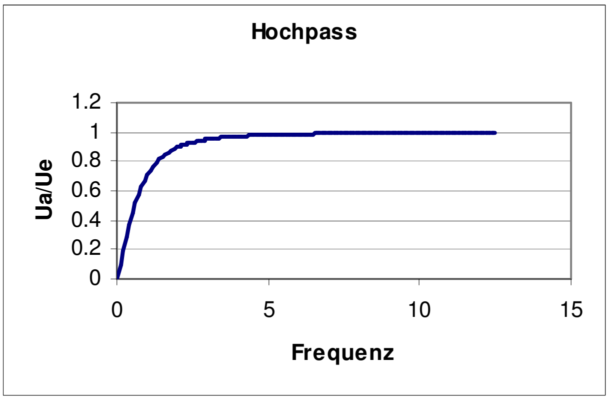


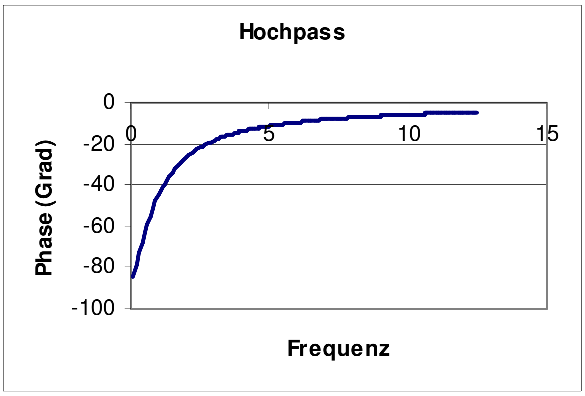




Für den Hochpass ergeben sich mit analogen Überlegungen die folgenden Beziehungen:




$$\frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = -\arctan(1/RC\omega)$$



**Arbeitsblatt Passive Netzwerke** Fr

1. Berechnen Sie:
   a) den ohmschen Widerstand eines 5.3m langen Aludrahtes mit einer Querschnittsfläche von $0.1mm^2$,
   b) die Kapazität eines Plattenkondensators mit Abstand 2mm und $50cm^2$ Plattenfläche und
   c) die Induktivität einer langen, einlagig gewickelten Luftspule mit 1200 Windungen, der Länge 22cm und 3.5cm Durchmesser.

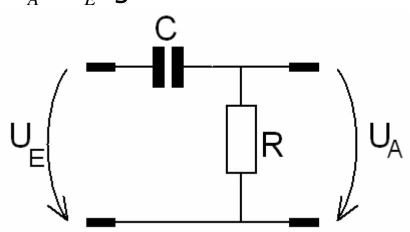
2. Eine sinusförmige Spannung U(t) mit der Spitzenspannung 120V und der Frequenz 240Hz wird
   a) an eine ohmschen Widerstand von $2200\Omega$ ,
   b) an einen Kondensator mit einer Kapazität von $0.33\mu F$ bzw.
   c) an eine Spule mit einer Induktivität von 180mH angelegt.
   Berechnen Sie in jedem Fall die durch das jeweilige Element fliessende Stromstärke in Funktion der Zeit.

3. Entlädt man einen Kondensator C über einem Widerstand R, so sinkt die Spannung zunächst rasch, dann immer langsamer. Wie gross ist die Spannung zwei Sekunden nach Entladebeginn, falls $R=2.7M\Omega$, C=4.7nF und $U_0$ = 300V?

4. Ein Kondensator $C=2.5\mu F$ wird an einer Gleichspannung U=10V über einen Widerstand $R=400k\Omega$ aufgeladen. Zum Zeitpunkt t=0 ist die Spannung über dem Kondensator 0V. Berechnen Sie die Spannung U(t) über dem Kondensator.

5. An einen LC-Parallelschwingkreis ($L=4.7\mu H$; C= 22 nF) wird eine sinusförmige Spannung angelegt. Bei welcher Frequenz gerät der Schwingkreis in Resonanz?

6. Berechnen Sie für das folgende Filter (C=22nF, $R=47k\Omega$) das numerische Verhältnis $\frac{\hat{U}_A}{\hat{U}_E} = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ für Frequenzen zwischen 1 und 10000Hz (in 10-er-Potenzschritten) und zeichnen Sie ein Diagramm $\hat{U}_A / \hat{U}_E$ gegen log(f). Für welche Frequenz ist $\hat{U}_A / \hat{U}_E$ genau 0.5? Welche Funktion erfüllt das Filter?

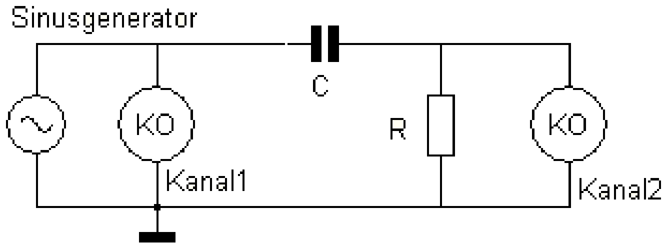


**Praktikum Passive Netzwerke, Schwingkreis**

Material: Funktionsgenerator, Kathodenstrahloszillograph (KO), Widerstände, Kondensatoren, Induktivitäten

1. Schliessen Sie den Ausgang des FG (auf Stellung „Sinus") an den linken Eingang (KO 1) an und stellen Sie eine Frequenz von 1200Hz und eine Amplitude von 2V ein. Auf dem KO muss eine stehende Sinuskurve erscheinen. Dazu muss der Trigger auf Channel 1 stehen (=KO1).

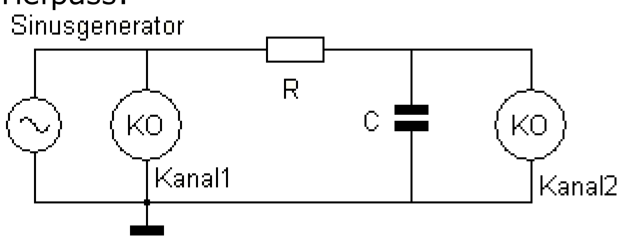
2. Bauen Sie mit R=1 $k\Omega$ und C=0.1 $\mu F$ folgendes Netzwerk auf:




   Überzeugen Sie sich von der Funktionsweise der Schaltung, indem Sie die Frequenz in 10er-Potenzschritten ändern (z.B. 20, 200, 2000, 20000).
   Feststellung:

   Variieren Sie ebenfalls die Amplitude. Was stellen Sie fest?
   Wie können Sie die Funktion der Schaltung beschreiben?

3. Vertauschen Sie Widerstand und Kondensator. Damit ergibt sich ein so genannter Tiefpass:

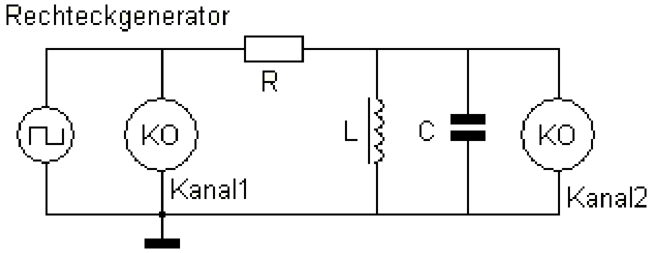



   Erstellen Sie ein Diagramm, indem Sie $U_{Ausgang}$ (=Spannung an KO2) in Funktion des 10-er Logarithmus der Frequenz auftragen.
   Vergleichen Sie $\hat{U}_A / \hat{U}_E$ mit der Theorie. Für welche Frequenz ist $\hat{U}_A / \hat{U}_E$ =0.5?

   f=______________________Hz

   Beobachten Sie ebenfalls die Phasenverschiebung.

4. Gedämpfter Schwingkreis
   Bauen Sie folgende Schaltung auf:

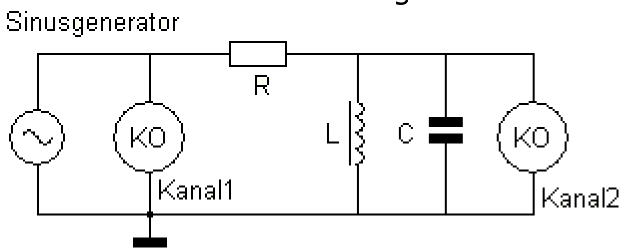



Wählen Sie: R= 47 $k\Omega$ und C=0.1 $\mu F$ , Rechteckfrequenz f=10Hz. Variieren Sie f in kleinen Schritten. Skizzieren Sie in einem Diagramm U(KO2). Interpretation?

Bestimmen Sie von Auge auf dem KO die Schwingungsfrequenz $f_0$. (Hinweis: Time/Div meint die Zeit, die von einem Häuschen bis zum nächsten verstreicht, diese Häuschen sind auf dem KO-Bild ca. 1cm breit.)

Schwingungsfrequenz $f_0$ :____________________Hz (aus KO-Bild)

Resonanzkurve
Schalten Sie den Funktionsgenerator in Stellung „Sinus" um:




Variieren Sie die Frequenz bis Sie die Resonanzstelle gefunden haben. Notieren Sie sich die Resonanzfrequenz $f_0$ (eventuell mit Steinegger-Frequenzmessgerät nachmessen) und berechnen Sie daraus die bisher unbekannte Induktivität L der Spule.

Resonanzfrequenz $f_0$ = ________________Hz ( mit ____________________________)

Berechnung:

Induktivität L = ___________________ mH (via Berechnung)

Zeichnen Sie ein Diagramm, in dem Sie die Schwingkreisspannung in Funktion der Frequenz auftragen.
Skizzieren Sie ebenfalls ein grobes Phasen-Frequenzdiagramm und konzentrieren Sie sich besonders auf sehr tiefe und sehr hohe Frequenzen (in 10-er Potenzschritten). Wie gross ist die Phasenverschiebung im Resonanzfall?

**ANHANG**
**Zur Begründung elektromagnetischer Wellen**

Die Maxwellgleichungen lauten in differentieller Schreibweise:

$$(I) \qquad \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$(II) \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$(III) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$(IV) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Dabei bedeutet $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ den Nabla-Operator und $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, usw$ die sogenannten partiellen Ableitungen nach t, x usw. Wird eine Funktion f(x,y,z,t) z.B. nach x partiell abgeleitet, so werden die in der Funktionsvorschrift vorkommenden Variablen t, y, z als Konstanten behandelt, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $\vec{A} = \begin{pmatrix} xy \\ ze^y \\ 2z + xyz + y \end{pmatrix}$, dann ist das „Skalarpodukt“

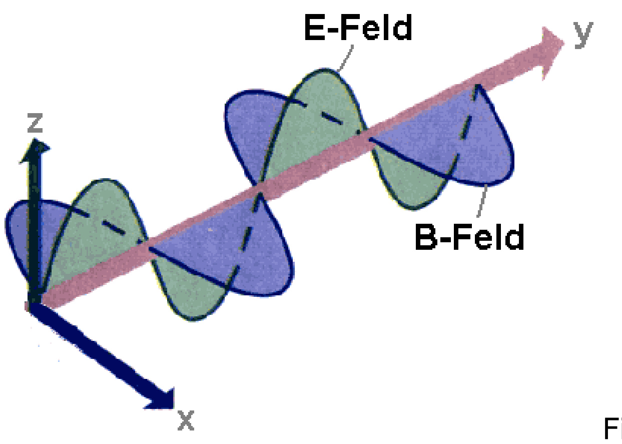
$$\nabla \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy \\ ze^y \\ 2z + xyz + y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial y} ze^y + \frac{\partial}{\partial z}(2z + xyz + y) = y + ze^y + 2 + xy$$

Für elektromagnetische Wellen im Vakuum oder durchsichtigen Materialien sind keine Ladungen vorhanden (Ladungsdichte $\rho = 0$) und es fliessen keine Ströme (Stromdichte $j = 0$). Zunächst dürfen E-Feld und B-Feld irgendwelche Funktionen der vier Variablen x,y,z,t sein.

Wir machen folgende Vereinfachungen:

Die elektromagnetische Welle soll sich exakt in y-Richtung bewegen. Das elektrische Feld werde in z-Richtung gewählt, damit liegen alle B-Vektoren in x-Richtung, wie Figur 1 zeigt. Damit nimmt man natürlich einen Teil der Lösung von (I) bis (IV) bereits vorweg; d.h. man bereitet E und B für den geeigneten Ansatz vor.




Figur 1

Für die Felder ergeben sich folgende Funktionen:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(x,y,z,t) \end{pmatrix} \textit{ und } \vec{B} = \begin{pmatrix} B(x,y,z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus (I) folgt damit $\nabla\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}(E(x,y,z,t)) = 0$, was nichts anderes bedeutet, als dass E keine Funktion von z sein kann. Aus (VI) folgt analog, dass $\frac{\partial}{\partial x}B(x,y,z,t) = 0$ und daher B keine Funktion von x sein kann. Betrachten wir nun Gleichung (II). Das „Vektorprodukt" von $\nabla$ mit B auf der linken Seite stellt die sogenannte „Rotation von B" dar, rechts steht die partielle Ableitung von E nach der Zeit:

$$\nabla\times\vec{B} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \partial_y & 0 \\ \partial_z & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \partial_z & 0 \\ \partial_x & B \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \partial_x & B \\ \partial_y & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}B \\ -\frac{\partial}{\partial y}B \end{pmatrix} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E \end{pmatrix}$$

$\partial_y$ ist eine oft verwendetet Abkürzung für den Differentialoperator $\frac{\partial}{\partial y}$. Der Uebersichtlichkeit halber schreiben wir B = B(x,y,z,t) und E = E(x,y,z,t)).
Die Gleichung zeigt, dass B keine Funktion von z sein kann und dass die dritte Komponente die folgende *partielle Differentialgleichung* PDGL liefert

$$(A) \quad -\frac{\partial}{\partial y}B = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E$$

Analog erhält man aus MG (III), dass E keine Funktion von x sein kann; die zweite

PDGL lautet demnach:

$$(B) \quad \frac{\partial}{\partial y} E = -\frac{\partial}{\partial t} B$$

Leitet man (A) nach t und (B) nach y ab, ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(A^*) \quad -\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial y} B) = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial t} E) \qquad (B^*) \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y} E) = -\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial t} B)$$

Man kann zeigen, dass es keine Rolle spielt, ob man B(y,t) zuerst nach t und dann nach y ableitet oder umgekehrt; hier ergibt sich daraus Gleichheit für (A*) und (B*). Man erhält die folgende homogene, partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für E(y,t):

$$(C) \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y} E) = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial t} E)$$

In Worten: gesucht ist eine Funktion E(y,t), deren zweite Ableitung nach y bis auf einen konstanten Faktor mit der zweiten Ableitung nach t übereinstimmt. Hier bieten sich Exponentialfunktionen mit geeigneten Parametern an; ein einfacher Ansatz, der der PDGL auch genügt, sind harmonische Wellen für E:

$$E(y.t) = \hat{E}\sin(\omega t - kx), \, mit \ \omega = \frac{2\pi}{T} \ und \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Kontrolle:

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \hat{E}\omega\cos(\omega t - kx) \quad und \quad \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial t} E) = -\hat{E}\omega^2 \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E = -\hat{E}k\cos(\omega t - kx) \quad und \quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial y} E) = -\hat{E}k^2 \sin(\omega t - kx)$$

$$in\ (C)\ eingesetzt: \ \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\hat{E}\omega^2\sin(\omega t - kx) = \hat{E}k^2\sin(\omega t - kx)$$

Nach Division durch $\hat{E}\sin(\omega t - kx)$ ergibt sich folgende Beziehung zwischen den zeit- und ortsunabhängigen Grössen:

$$k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2$$

Da für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \lambda / T$ ist, folgt

$$k = \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\,\omega \quad und \quad \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi}{T} \quad also$$

$$c = \frac{\lambda}{T} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}}}$$

Folgerungen und Bemerkungen:
Für Vakuum gilt $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ergibt sich daher zu

$$c_{Vac} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}} ms^{-1} = 3 \cdot 10^8 ms^{-1}$$

Damit ist die Lichtgeschwindigkeit c aus den Naturkonstanten $\varepsilon_0$ und $\mu_0$ ableitbar!
Das ist allein aufgrund der Maxwellgleichungen möglich, die ihrerseits aus der Elektrodynamik herrühren. Für durchsichtige Medien wie Glas, Wasser usw. ist

darüberhinaus eine Interpretation des Brechungsindexes möglich:

$$c_{Med} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c_{Vac}}{n_{Med}} \quad und\ damit \quad n = \sqrt{\mu\varepsilon}$$

Die Optik wird zu einem Teilgebiet der Elektrizitätslehre!